1 Analyse et probabilités

1.1 Théorème de réarrangement de Riemann (223, 230) [2]

Théorème 1.1 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que la série $\sum u_n$ soit semie-convergente, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \ell \in \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = +\infty.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = x.$$

Commençons par quelques notations. On note :

$$E^+ = \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \geq 0\}\,, \text{ et}$$

$$E^- = \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n < 0\}\,.$$

Ce théorème se base sur le fait que, étant donné que la série soit semi-convergente, la suite (u_n) tend vers zéro, mais :

1. Il y a un nombre infini de termes positifs et négatifs dans cette suite, ce qui permet l'existence de bijections croissantes :
$$\varphi \;:\; \mathbb{N}^* \longrightarrow E^+ \quad \text{et} \quad \psi \;:\; \mathbb{N}^* \longrightarrow E^-.$$
2. Ils restent suffisaments "grands" pour faire tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ la série à partir de n'importe où. Concrètement :
$$\sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
c'est-à-dire que la somme partielle des termes positifs diverge. De même :
$$\sum_{k=1}^{n} u_{\psi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$
c'est-à-dire que la somme partielle des termes négatifs diverge. On pourra donc sommer consécutivement les premiers termes positifs jusqu'à dépasser notre cible x, puis retrancher les termes négatifs que l'on a raté jusqu'à tomber en dessous de x, etc. Cette démarche permettra de construire explicitement la permutation σ demandée par récurrence et de bien converger vers x étant donné que u_n tend vers 0.

Démonstration. Après cette heuristique, commençons la preuve.

Lemme 1.2. Si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors il existe des bijections croissantes

$$\varphi \quad : \quad \mathbb{N}^* \quad \longrightarrow \quad E^+ \quad \text{et} \quad \psi \quad : \quad \mathbb{N}^* \quad \longrightarrow \quad E^-.$$

et on a :

$$S_n^+ := \sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

$$S_n^- := \sum_{k=1}^{n} u_{\psi(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Démonstration. Supposons par exemple E^+ fini et notons n_0 son élément maximal. On aurait alors :

$$\forall N > n_0, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0+1}^{N} u_n.$$

Or, à partir du rang $n_0 + 1$, par définition de n_0, tous les u_n sont négatifs. On a alors :

$$\forall N > n_0, \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{N} u_n}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell} = \sum_{n=1}^{n_0} u_n - \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{N} |u_n|}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty}.$$

CONTRADICTION ! Donc E^+ est infini, et le même raisonnement marche pour montrer que E^- est aussi infini. À partir de là, les applications φ et ψ définies par :

$$\begin{cases} \varphi(1) = \min E^+, & \psi(1) = \min E^- \\ \forall n \geq 1, \quad \varphi(n+1) = \min\left(E^+ \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}\right), & \psi(n+1) = \min\left(E^- \setminus \{\psi(1), \ldots, \psi(n)\}\right), \end{cases}$$

sont bien définies et sont des bijections croissantes. Notons alors :

$$\tilde{S}_n^+ := \sum_{k \in \varphi^{-1}(E^+ \cap [\![1,n]\!])} u_{\varphi(k)}$$

et

$$\tilde{S}_n^- := \sum_{k \in \psi^{-1}(E^- \cap [\![1,n]\!])} u_{\psi(k)}.$$

Que sont ces sommes ? Ce sont la somme des termes positifs (resp. négatifs) dont les indices sont plus petits que n. Étant donné que E^+ et E^- partitionnent $\mathbb{N}^*$ et que φ et ψ sont croissantes (i.e. l'ordre est respecté), on a :

$$\tilde{S}_n^+ + \tilde{S}_n^- = \sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

et

$$\tilde{S}_n^+ - \tilde{S}_n^- = \sum_{k=1}^{n} |u_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi :

$$\tilde{S}_n^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} |u_k|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

et :

$$\tilde{S}_n^- = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} |u_k|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

À partir de là, étant donné que φ est croissante, en notant $r_n = \#(E^+ \cap [\![1, n]\!]) \leq n$, on a :

$$\tilde{S}_n^+ = \sum_{k=1}^{r_n} u_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)} = S_n^+$$

la croissance de φ assure en effet que $\varphi^{-1}\left(E^+ \cap [\![1, n]\!]\right) = [\![1, r_n]\!]$. On a donc :

$$S_n^+ \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

De même,

$$S_n^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

$\square$

À partir de là, il faut distinguer les cas $x \in \mathbb{R}$ et $x = \pm\infty$.

Cas 1 : réarrangements divergents.
On se concentre sur le cas $x = +\infty$ quitte à considérer la suite $(-u_n)$ qui vérifie les mêmes hypothèses que (u_n). On définit $n_1 \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier n vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n_1} u_{\varphi(k)} + u_{\psi(1)} > 1.$$

Cet entier est bien défini, étant donné que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$. Maintenant, pour $j \in \mathbb{N}^*$ on définit par récurrence l'entier n_{j+1} comme le plus petit entier n strictement supérieur à n_j tel que :

$$\sum_{k=n_j+1}^{n} u_{\varphi(k)} + u_{\psi(j+1)} > 1.$$

La suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante. On pose alors la permutation σ ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n_1 & n_1+1 & n_1+2 & \dots & n_j+j-1 & n_j+j & n_j+j+1 & \dots \\ \varphi(1) & \dots & \varphi(n_1) & \psi(1) & \varphi(n_1+1) & \dots & \varphi(n_j) & \psi(j) & \varphi(n_j+1) & \dots \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(n_k + k) = \psi(k)$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_k + k + 1, n_{k+1} + k]\!], \quad \sigma(n) = \varphi(n - k),$$

de sorte que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{n_j+j} u_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{j} \underbrace{\left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} u_{\varphi(k)} + u_{\psi(i)}\right)}_{>1} > j,$$

avec comme convention $n_0 = 0$. Montrons dès lors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = +\infty.$$

Soit $A > 0$. Prenons $E = \lfloor A \rfloor + 1$. Pour tout $N \geq n_E + E$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} \geq \sum_{n=1}^{n_E+E} u_{\sigma(n)} > E > A.$$

La première inégalité ne m'a pas paru clairement triviale et il a fallu que je m'y attarde beaucoup avant de trouver pourquoi. En effet, on somme des termes qui peuvent être négatifs ! Posons $J \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier j tel que $n_j + j \leq N$ et regardons les termes en détail :

$$\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} \geq \sum_{n=1}^{n_E+E} u_{\sigma(n)} + \underbrace{\overbrace{(J-E)\times 1}^{\substack{\text{termes entre} \\ n_E+E+1 \text{ et } n_J+J}}}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{n=n_J+J+1}^{N} u_{\sigma(n)}}_{\geq 0} \geq \sum_{n=1}^{n_E+E} u_{\sigma(n)}.$$

Le terme $(J-E)\times 1$ correspond aux termes de la forme :

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} u_{\varphi(k)} + u_{\psi(j+1)}$$

que l'on a minoré par 1 et il y en a exactement $J - E$ d'après la définition de J. Idem, par la même définition de J, les termes de la somme :

$$\sum_{n=n_J+J+1}^{N} u_{\sigma(n)}$$

sont tous de la forme $u_{\varphi(k)}$, avec $k \geq n_J + 1$ et donc positifs. OUF !
Dernier point important ! Il faut se convaincre que σ est bien une permutation ! Si vous êtes convaincus que ça se voit et que vous dites « φ et ψ étant des bijections dont les images partitionnent $\mathbb{N}^*$, il est clair que la construction de σ assure sa bijectivité », le jury sera sasns doute content. Si vous n'êtes pas convaincus, je vous détaille vite fait pourquoi c'est vrai. La surjectivité est claire. En effet, on a :

$$\sigma(\mathbb{N}^*) = \varphi(\mathbb{N}^*) \cup \psi(\mathbb{N}^*) = E^+ \cup E^- = \mathbb{N}^*.$$

Pour l'injectivité, si $k_1 \neq k_2$, alors, ou bien $\sigma(k_1) \in E^+$ et $\sigma(k_2) \in E^-$, et dans ce cas-là, on a clairement $\sigma(k_1) \neq \sigma(k_2)$, ou bien $\sigma(k_1)$ et $\sigma(k_2)$ sont tous les deux dans l'image de φ ou ψ. Mais comme $k_1 \neq k_2$ et que φ et ψ sont bijectives, nécessairement $\sigma(k_1) \neq \sigma(k_2)$.

Cas 2 : réarrangements convergents.
On se place donc dans le cas $x \in \mathbb{R}$ et le but est de construire par récurrence la permutation σ selon l'idée de l'heuristique.

Je vais décider de commencer à sommer les termes négatifs. Posons n_1^- le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$S_n^- \leq x.$$

Il faut alors sommer les termes positifs ensuite. Posons n_1^+ le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$S_{n_1^-}^- + S_n^+ > x.$$

Il faut ensuite sommer des termes négatifs. Lesquels ? Ceux de la forme $u_{\psi(k)}$ avec $k \geq n_1^- + 1$. Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n_1^-}^- + \sum_{k=n_1^-+1}^{n} u_{\psi(k)} = S_n^-.$$

On définit alors n_2^- comme le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ strictement supérieur à n_1^- tel que :

$$S_{n_1^+}^+ + S_n^- \leq x.$$

Idem, on définit n_2^+ comme le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ strictement supérieur à n_1^+ tel que :

$$S_{n_2^-}^- + S_n^+ > x.$$

Avec cette idée, on définit les suites (n_j^-) et (n_j^+) par récurrence en décrétant que :

— n_{j+1}^- est le plus petit entier $n > n_j^-$ tel que :

$$S_{n_j^+}^+ + S_n^- \leq x$$

— n_{j+1}^+ est le plus petit entier $n > n_j^+$ tel que :

$$S_{n_{j+1}^-}^- + S_n^+ > x.$$

On pose alors la permutation σ ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n_1^- & n_1^- + 1 & \dots & n_1^- + n_1^+ & n_1^- + n_1^+ + 1 & \dots & n_1^+ + n_2^- & \dots \\ \psi(1) & \dots & \psi(n_1^-) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n_1^+) & \psi(n_1^- + 1) & \dots & \psi(n_2^-) & \dots \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![n_k^- + n_k^+ + 1, n_{k+1}^- + n_k^+]\!], \quad \sigma(n) = \psi(n - n_k^+)$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_k^- + n_{k-1}^+ + 1, n_k^- + n_k^+]\!], \quad \sigma(n) = \varphi(n - n_k^-)$$

avec comme convention, $n_0^- = n_0^+ = 0$, de sorte que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{n_j^+ + n_{j+1}^-} u_{\sigma(n)} = S_{n_{j+1}^-}^- + S_{n_j^+}^+,$$

et :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{n_j^+ + n_j^-} u_{\sigma(n)} = S_{n_j^-}^- + S_{n_j^+}^+.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = x.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$. Étant donné que (u_n) tend vers 0, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n| < \varepsilon.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\min\big(\varphi(n_k^+), \psi(n_k^-)\big) \geq N_1$ et soit $N \geq n_k^- + n_{k-1}^+$. On a l'alternative suivante :

1.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x\right| = \sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x.$$

Dans ce cas, on est dans la situation suivante :

$$\exists j \geq k, \quad N \in [\![n_j^- + n_j^+, n_{j+1}^- + n_j^+ - 1]\!].$$

En effet, on a dépassé x, donc le dernier terme positif à avoir été sommé est le terme $u_{\varphi\left(n_j^+\right)}$ et on commence à sommer les termes négatifs $u_{\psi(m)}$ pour $m \in [\![n_j^- + 1, n_{j+1}^- - 1]\!]$ sans être passé en-dessous de x pour autant (et donc le terme $u_{\psi\left(n_{j+1}^-\right)}$ n'a pas encore été sommé). On a donc :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x\right| = \sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x \leq \sum_{n=1}^{n_j^- + n_j^+} u_{\sigma(n)} - x = \underbrace{S_{n_j^-}^- + S_{n_j^+ - 1}^+ - x}_{<0 \text{ par définition de } n_j^+} + \underbrace{u_{\varphi(n_j^+)}}_{<\varepsilon} < \varepsilon.$$

2.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x\right| = x - \sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)}.$$

Dans ce cas, on est dans la situation suivante :

$$\exists j \geq k-1, \quad N \in [\![n_j^+ + n_{j+1}^-, n_{j+1}^+ + n_{j+1}^- - 1]\!].$$

En effet, on est en-dessous de x, donc le dernier terme négatif à avoir été sommé est le terme $u_{\psi\left(n_j^-\right)}$ et on commence à sommer les termes positifs $u_{\varphi(m)}$ pour $m \in [\![n_{j-1}^+ + 1, n_j^+ - 1]\!]$ sans être passé au-dessus de x pour autant (et donc le terme $u_{\varphi\left(n_j^+\right)}$ n'a pas encore été sommé). On a donc :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x\right| = x - \sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} \leq x - \sum_{n=1}^{n_j^+ + n_{j+1}^-} u_{\sigma(n)} = \underbrace{x - S_{n_{j+1}^- - 1}^- - S_{n_j^+}^+}_{<0 \text{ par définition de } n_{j+1}^-} \underbrace{- u_{\psi(n_{j+1}^-)}}_{>-\varepsilon} < \varepsilon.$$

On a donc dans tous les cas :

$$\forall N \geq n_{k-1}^+ + n_k^-, \quad \left|\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)} - x\right| < \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve ! □

Remarque 1.1.1. *Vous pourrez largement omettre certains détails de la preuve que j'ai écrite ici, et même ne prouver que le cas $x \in \mathbb{R}$. Cependant il me semble important de connaître le résultat pour $x = \pm\infty$ et d'avoir une idée de la démonstration.*